

Correction de la question 1 de l'exercice 4 du TD n°2

Soit f une application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} , de classe \mathcal{C}^1 . On effectue le changement de variable en coordonnées polaires en définissant

$$g : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ (r, \theta) \mapsto f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)).$$

Justifier que g est \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et calculer ses dérivées partielles en fonction de celles de f .

On pose

$$h : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ (r, \theta) \mapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta)),$$

alors $g = f \circ h$ est une fonction \mathcal{C}^1 comme composée de fonctions \mathcal{C}^1 . De plus par la formule de composée de fonctions différentiables, on a

$$\forall (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2, \quad d_{(r,\theta)}g(k_1, k_2) = d_{h(r,\theta)}f \left(d_{(r,\theta)}h(k_1, k_2) \right). \quad (1)$$

Calculons la différentielle de h . Puisque

$$\frac{\partial h}{\partial r}(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial h}{\partial \theta}(r, \theta) = \begin{pmatrix} -r \sin(\theta) \\ r \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

On en déduit à l'aide de la formule donnant la différentielle en fonction des dérivées partielles que,

$$d_{(r,\theta)}h(k_1, k_2) = \frac{\partial h}{\partial r}(r, \theta) \times k_1 + \frac{\partial h}{\partial \theta}(r, \theta) \times k_2 = \begin{pmatrix} \cos(\theta)k_1 - r \sin(\theta)k_2 \\ \sin(\theta)k_1 + r \cos(\theta)k_2 \end{pmatrix}.$$

En réinjectant cette formule dans (1),

$$\forall (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2, \quad d_{(r,\theta)}g(k_1, k_2) = d_{(r \cos(\theta), r \sin(\theta))}f (\cos(\theta)k_1 - r \sin(\theta)k_2, \sin(\theta)k_1 + r \cos(\theta)k_2).$$

D'autre part, puisque l'on a également (formule de la différentielle en fonction des dérivées partielles), $d_{(x,y)}f(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \times u + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \times v$, on en déduit avec $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$, $u = \cos(\theta)k_1 - r \sin(\theta)k_2$ et $v = \sin(\theta)k_1 + r \cos(\theta)k_2$ que pour tout $(k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} d_{(r,\theta)}g(k_1, k_2) &= \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \times (\cos(\theta)k_1 - r \sin(\theta)k_2) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \times (\sin(\theta)k_1 + r \cos(\theta)k_2) \\ &= \left(\cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) + \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \right) k_1 \\ &\quad + \left(-r \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) + r \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \right) k_2. \end{aligned}$$

Puis comme $\frac{\partial g}{\partial r}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = d_{(r,\theta)}g(1, 0)$ et $\frac{\partial g}{\partial \theta}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = d_{(r,\theta)}g(0, 1)$, en conclut que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial r}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) &= \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) + \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \\ \frac{\partial g}{\partial \theta}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) &= -r \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) + r \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)). \end{aligned}$$